习题课一

一. 内容与要求

1. 理解函数、复合函数、反函数、初等函数的概念，了解函数的特性，熟悉基本初等函数的图形与特性。会求函数（复合）的定义域与表达式。

2. 理解极限概念,会用分析定义叙述数列极限、函数极限、无穷大量、无穷小量。并能作一些简单证明。

3. 了解无穷小、极限的性质和运算法则，会求极限。

注：对于不定型 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},\infty-\infty$

(1).消去零因子法求极限;(因式分解，分母、分子有理化）

(2).无穷小因子分出法求极限;

(3). $\infty-\infty,(0\cdot\infty)$型化为$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$.

练 习 题

1、求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+(-2)^n}{5^{n+1}+(-2)^{n+1}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$

(3) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{e^x+e^{-x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$　　(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

练 习 题

1、求极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n+(-2)^n}{5^{n+1}+(-2)^{n+1}}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}$

(3) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{e^x+e^{-x}}$

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$ (7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

2.判别极限是否存在

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$,其中$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\le x<0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1 \end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

3、求a,b,使之满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$,

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5^n+(-2)^n}{5^{n+1}+(-2)^{n+1}};\quad 解:原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-\frac{2}{5})^n}{5-2(-\frac{2}{5})^n}=\frac{1}{5}.$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{2+x^{2n}}=\begin{cases}\frac{2}{3}, & x=-1\\ 0, & x=1\\ \frac{1}{2}, & |x|<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}(\frac{1}{x^{2n+1}}-1)}{x^{2n}(\frac{2}{x^{2n}}+1)}=-x, & |x|>1.\end{cases}$$

(3) $$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}=-2.$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=0$$

(5) $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+4x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{-x}-4}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=-2.$$

(6) $\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$

$$原式=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0.$$

(7) $\lim_{n\to+\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

$$(8)\quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\sqrt{x^3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}})(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}})}=-\frac{1}{4}$$

3.判别极限是否存在

(1) $\lim_{x\to 0} f(x)$,其中$f(x)=\begin{cases} x-1 & -1\le x<0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0\le x\le 1 \end{cases}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$.

解 (1).

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$,所以$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在.

(2). $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0, \lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1,$

所以极限不存在。

4、由极限值确定参数

1. 求a,b,使之满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$,

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})(5x+\sqrt{ax^2-bx+c})}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2,$$

$$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases},$$ 解得$a=25$, $b=20$.